1. Concepts fondamentaux de l'algèbre

1.1. Nombres réels

Propriétés des nombres opposés $-(-a)=a$ $(-a)b=-(ab)=a(-b)$ $(-a)(-b)=ab$ $(-1)a=-a$	 $-(-3)=3$ $(-2)3=-(2\cdot 3)=2(-3)$ $(-2)(-3)=2\cdot 3$ $(-1)(3)=-3$
Notation des inverses $a^{-1}=\frac{1}{a}$	 $2^{-1}=\frac{1}{2}$
Soustraction et division $a-b=a+(-b)$ $a\div b=a*\left(\frac{1}{b}\right)$	 $3-7=3+(-7)$ $3\div 7=3\left(\frac{1}{7}\right)$
Propriétés des quotients $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$ $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$	 $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$ $\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{2}{5}$ $\frac{2}{-5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}+\frac{9}{5}=\frac{2+9}{5}=\frac{11}{5}$ $\frac{2}{5}+\frac{4}{3}=\frac{2\cdot 3+5\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{26}{15}$ $\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{14}{15}$ $\frac{2}{5}\div\frac{7}{3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{6}{35}$
Définition de la valeur absolue Si $a\geq 0$ alors $\lvert a\rvert=a$ Si $a<0$ alors $\lvert a\rvert=-a$	 $\lvert 3\rvert=3$ $\lvert -3\rvert=-(-3)=3$
Distance entre A et B $d\left(A,B\right)=\lvert b-a\rvert$	 $d\left(-3,-5\right)=\lvert -3-(-5)\rvert=\lvert -3+5\rvert=\lvert 2\rvert=2$
Notation scientifique $a=c\times 10^{n}$	 $513=5.13\times 10^{2}$

1.2. Puissances et racines

Notation an $a^{n}=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a$	 $3^{3}=3\cdot 3\cdot 3=27$
Exposants négatifs ou nuls $a^{0}=1$ $a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$	 $3^{0}=1$ $5^{-3}=\frac{1}{5^{3}}$
Règles de calcul des puissances $a^{m}a^{n}=a^{m+n}$ $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$ $(ab)^{n}=a^{n}b^{n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\left(\frac{a^{n}}{b^{n}}\right)$ $\frac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}=\frac{1}{a^{n-m}}$	 $2^{3}\cdot 2^{4}=2^{3+4}=2^{7}=128$ $\left(2^{3}\right)^{4}=2^{3\cdot 4}=2^{12}=4096$ $(20)^{3}=(2\cdot 10)^{3}=2^{3}\cdot 10^{3}=8\cdot 1000=8000$ $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}=\frac{2^{3}}{5^{3}}=\frac{8}{125}$ $\frac{2^{5}}{2^{3}}=2^{5-3}=\frac{1}{2^{3-5}}=4$
Théorème des exposants négatifs $\frac{a^{-m}}{b^{-n}}=\frac{b^{n}}{a^{m}}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$	 $\frac{2^{-2}}{3^{-2}}=\frac{1\div 2^{2}}{1\div 3^{2}}=\frac{1}{4}\times\frac{9}{1}=\frac{9}{4}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{2^{-2}}{3^{-2}}=\frac{3^{2}}{2^{2}}=\frac{9}{4}$
Propriétés de $\sqrt[n]{\ }$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n}=a$ $\sqrt[n]{a^{n}}=a$ si $a\geq 0$ ou $a<0$ et n impair $\sqrt[n]{a^{n}}=\lvert a\rvert$	 $\left(\sqrt{5}\right)^{2}=5$ $\sqrt[3]{2^{3}}=2$ $\sqrt[4]{(-2)^{4}}=\lvert -2\rvert=2$
Règles de calcul des racines $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	 $\sqrt{50}=\sqrt{2\cdot 25}=\sqrt{25}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}$ $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^{6}}=2$
Définition des exposants rationnels $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$ $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^{m}}=\left(a^{m}\right)^{1/n}$	 $2^{1/3}=\sqrt[3]{2}$ $2^{3/5}=\sqrt[5]{2^{3}}=(2^{3})^{1/5}$

1.3. Expressions algébriques

Identités remarquables	
$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$	$(2a+3)(2a-3)=(2a)^2-3^2=4a^2-9$
$(x\pm y)^2=x^2\pm 2xy+y^2$	$(2a-3)^2=(2a)^2-2(2a)(3)+(3)^2=4a^2-12a+9$
$(x\pm y)^3=x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3$	$(2a+3)^3=8a^3+36a^2+54a+27$
$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$	$8a^3-27=(2a-3)(4a^2+6a+9)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$	$125a^3+1=(5a+1)(25a^2-5a+1)$

1.4. Expressions fractionnaires

Fractions rationnelles	
$\dfrac{6x^2-5x+4}{x^2-9}$	Où $x \neq \pm 3$

2. Equations et inéquations

2.1. Equations

Résolution d'une équation contenant des fractions rationnelles

1. Déterminer le ppmc des fractions rationnelles	$\dfrac{3}{2(x-2)}2(x-2)(x+3)-\dfrac{5}{x+3}2(x-2)(x+3)$ $=\dfrac{2}{x-2}2(x-2)(x+3)$
2. Trouver les valeurs de la variable qui annulent le ppmc	
3. Multiplier chaque terme de l'équation par le ppmc et simplifier	$3(x+3)-10(x-2)=4(x+3)$ simplifier les facteurs communs $3x+9-10x+20=4x+12$ effectuer les multiplications
4. Résoudre l'équation obtenue	$3x-10x-4x=12-9-20$ soustraire $4x$, 9 et 20 $-11x=-17$ regrouper les termes semblables $x=\frac{17}{11}$ diviser par -11

2.2. Applications

Résolution de problèmes d'application

1. Lire plusieurs fois soigneusement le problème	Un étudiant a obtenu en algèbre les notes 64 et 78. Quelle note doit-il encore avoir pour obtenir une moyenne de 80 ? **Etape 1** Lire le problème au moins encore une fois.
2. Choisir une/des lettre(s) qui représente(nt) la/les quantité(s) inconnue(s)	**Etape 2** La quantité inconnue est la troisième note, nous posons donc x = troisième note.
3. Faire éventuellement un dessin avec des légendes	**Etape 3** Un dessin ou un diagramme n'est pas nécessaire pour ce problème.
4. Dresser une liste des faits connus et des relations concernant la/les quantité(s) inconnue(s)	**Etape 4** Les faits connus sont les deux premières notes 64 et 78. Une relation faisant intervenir x est la moyenne entre 64, 78 et x. Alors, $\text{moyenne} = \dfrac{64+78+x}{3}$.
5. Formuler une ou plusieurs équations qui décrivent précisément ce qui est énoncé avec les mots	**Etape 5** Puisque la moyenne doit être 80, nous considérons l'équation $\dfrac{64+78+x}{3}=80$.
6. Résoudre l'équation	**Etape 6** Nous résolvons l'équation formulée à l'étape 5 : $64+78+x=80\cdot 3$ multiplier par 3 $142+x=240$ réduire $x=98$ soustraire 142
7. Contrôler les solutions en les injectant dans les équations de base	**Etape 7** *Contrôle* Si les trois notes sont 64, 78 et 98, la moyenne est $\dfrac{64+78+98}{3}=\dfrac{240}{3}=80$,

2.3. Equations du 2ème degré

Théorème du produit égal à 0 $pq=0$ si $p=0$ ou $q=0$	$3\cdot 0=0, 0\cdot 5=0$
Equation du 2ème degré particulière $x^2=d$ alors $x=\pm\sqrt{d}$	$3^2=9, -3^2=9$
Compléter le carré $x^2+kx+\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2$ $x^2-kx+\left(\frac{k}{2}\right)^2=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2$	(Ajouter le carré de la moitié du coefficient de x) $x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$
Formule de résolution de l'équation du 2ème degré $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	

2.4. Inéquations

Intervalles	
$a<x<b$	$]a;b[$
$a\le x\le b$	$[a;b]$
$a\le x<b$	$[a;b[$
$a<x\le b$	$]a;b]$
$x>a$	$]a;\infty[$
$x\ge a$	$[a;\infty[$
$x<b$	$]-\infty;b[$
$x\le b$	$]-\infty;b[$
$-\infty<x<\infty$	$]-\infty;\infty[$
Propriétés des inégalités	
Si $a<b$ et $b<c$, alors $a<c$	$2<5$, $5<9$, $2<9$
Si $a<b$, alors $a+c<b+c$ et $a-c<b-c$	$2+9<5+9$, $2-3<9-3$
Si $a<b$ et $c>0$, alors $ac<bc$ et $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$	$2\cdot 9<5\cdot 9$, $\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$
Si $a<b$ et $c<0$, alors $ac>bc$ et $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$	$2(-9)>5(-9)$, $\frac{2}{-9}>\frac{5}{-9}$
Propriétés des valeurs absolues	
$\lvert a\rvert<b \equiv -b<a<b$	$\lvert 2\rvert<3\equiv -3<2<3$
$\lvert a\rvert>b \equiv a<-b$ ou $a>b$	$\lvert -2\rvert>1\equiv -2<-1$ ou $2>1$

2.5. Compléments sur les inéquations

Méthode de résolution des inéquations du 2ème degré

1. Lire la donnée	$x^2>7x-10$ donnée
2. Rendre nul un des côtés	$x^2-7x+10>0$ rendre nul un des côtés
3. Factoriser	$(x-2)(x-5)>0$ factoriser
4. Définir les intervalles	$]-\infty;2[$, $]2;5[$ et $]5;\infty[$.
5. Effectuer le tableau des signes et trouver les solutions	voir tableau ci-dessous

Intervalle	$]-\infty;2[$	$]2;5[$	$]5;\infty[$
Signe de $x-2$	$-$	$+$	$+$
Signe de $x-5$	$-$	$-$	$+$
Signe résultant	$+$	$-$	$+$

$]-\infty;2[\cup]5;\infty[$.

Propriétés supplémentaires des inéquations

Si $0<a<b$, alors $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$	Si $0<\frac{1}{x}<4$, alors $\frac{1}{1/x}>\frac{1}{4}$
$0<a^2<b^2$	$0<\left(\frac{1}{x}\right)^2<4^2$
$0<\sqrt{a}<\sqrt{b}$	$0<\sqrt{\frac{1}{x}}<\sqrt{4}$

3. Fonctions et graphiques

3.1. Systèmes de coordonnées rectangulaires

Formule de la distance $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$P_1(-3,6)$, $P_2(5,1)$ $d(P_1, P_2) = \sqrt{(5-(-3))^2 + (1-6)^2} \approx 9.43$
Formule du point milieu $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$	$M\left(\frac{-3+5}{2}; \frac{6+1}{2}\right) = \left(1; \frac{7}{2}\right)$

3.2. Représentations graphiques d'équations

Equation standard d'un cercle $C(h;k)$, $P(x;y)$ $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$	$C(-2;3)$, $P(4;5)$ $r = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40}$ $r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 = 40$

3.3. Droites

Définition de la pente de la droite $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$P_1(-1;4)$, $P_2(3;2)$ $m = \frac{2-4}{3-(-1)} = -\frac{1}{2}$
Equation d'une droite exprimée en fonction de sa pente $P_1(x_1; y_1)$ $y - y_1 = m(x - x_1)$	$P_1(1;3)$, $m = \frac{1}{2}$ $y - 3 = \frac{1}{2}(x-1)$
Recherche de l'équation d'une droite passant par deux points 1. Equation en fonction de la pente 2. Effectuer les multiplications 3. Mettre sous la forme $ax + by = n$	$y - 7 = \frac{5}{4}(x-1)$ $4(y-7) = 5(x-1)$ $4y - 28 = 5x - 5$ $-5x + 4y = 23$ $5x - 4y = -23$

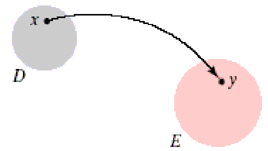
Formulaire

Passage de l'équation cartésienne d'une droite à sa forme réduite $ax + by = c \quad \rightarrow$ $y = mx + b$	$2x - 5y = 8$ $y = \frac{2}{5}x + \left(-\frac{8}{5}\right)$
Théorème sur les pentes des droites parallèles $m_1 = m_2$	
Théorème sur les pentes des droites perpendiculaires $m_1 m_2 = -1$	

3.4. Définition d'une fonction

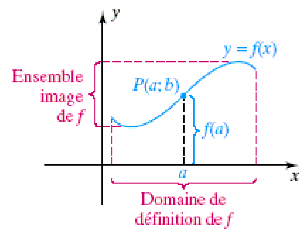
Définition d'une fonction

Une **fonction** f d'un ensemble D vers un ensemble E est une correspondance qui attribue à tout élément x de D exactement un élément y de E.



Définition du graphique d'une fonction

Le **graphique d'une fonction** f est le graphique de l'équation $y = f(x)$ pour x appartenant au domaine de définition de f.



Test de la droite verticale

Un ensemble de points dans un plan est la représentation graphique d'une fonction si toute droite verticale coupe la courbe en un point au plus.

Fonctions croissantes, décroissantes et constantes

$f(x) < f(y)$ si $x < y$	f est croissante
$f(x) > f(y)$ si $x < y$	f est décroissante
$f(x) = f(y)$ quels que soient x et y	f est constante

Définition d'une fonction du premier degré

Une fonction est une fonction **du premier degré** si

$$f(x) = ax + b,$$

où x est un nombre réel et a et b sont des constantes.

Si $b \neq 0$, elle est appelée **fonction affine**.
Si $b = 0$, $f(x) = ax$ et elle est appelée **fonction linéaire**.

Deuxième définition d'une fonction

Une **fonction**, dont le domaine de définition est D est un ensemble W de couples tels que, pour tout x de D, il y a exactement un couple $(x; y)$ de W ayant x en première position.

3.5. Représentation graphique de fonctions

Fonctions paires et impaires

$f(-x) = f(x)$	f est une fonction paire
$f(-x) = -f(x)$	f est une fonction impaire

Translations, étirement, compression

$y = f(x) + c$	Translation verticale vers le haut
$y = f(x) - c$	Translation verticale vers le bas
$y = f(x - c)$	Translation horizontale vers la droite
$y = f(x + c)$	Translation horizontale vers la gauche
$y = cf(x)$ avec $c > 1$	Etirement vertical
$y = cf(x)$ avec $0 < c < 1$	Compression verticale
$y = f(cx)$ avec $c > 1$	Compression horizontale
$y = f(cx)$ avec $0 < c < 1$	Etirement horizontal

3.6. Fonctions du 2ème degré

Définition de la fonction du 2ème degré

Une fonction f est une fonction du 2ème degré si $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a,b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$.

Equation standard d'une parabole verticale

$S(h;k)$ $y = a(x-h)^2 + k$	$S\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $y = 2(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2}$

Théorème donnant l'abscisse du sommet d'une parabole

$y = ax^2 + bx + c$	$y = 2x^2 + 8x + 3$
$-\frac{b}{2a}$	$-\frac{8}{4} = -2$

Théorème du maximum et du minimum

$-\frac{b}{2a}$	$Si\ a < 0$, maximum $Si\ a > 0$, minimum

Relations entre les différentes formes d'une fonction du 2ème degré

$y = a(x-h)^2 + k$	$Sommet:$ h et k dans la forme $Inter\sec tions\ Ox: x = h \pm \sqrt{-k/a}$
$y = a(x-x_1)(x-x_2)$	$Sommet:\ h = \frac{x_1 + x_1}{2}, k = f(h)$ $Inter\sec tions\ Ox: x = x_1, x_2$
$y = ax^2 + bx + c$	$Sommet:\ h = -\frac{b}{2a}, k = f(h)$ $Inter\sec tions\ Ox = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

3.7. Opérations sur les fonctions

Définition d'une fonction composée

La fonction composée $f \circ g$ de deux fonctions f et g est définie par

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Le domaine de définition de $f \circ g$ est l'ensemble de tous les x du domaine de définition de g tels que $g(x)$ est dans le domaine de définition de f.

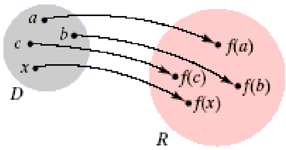
3.8. Fonctions réciproques

Définition d'une fonction bijective

Une fonction f de domaine de définition D et d'ensemble image R est une **fonction bijective** si l'une des conditions suivantes équivalentes est satisfaite :

(1) Pour tout $a \neq b$ dans D, on a $f(a) \neq f(b)$ dans R.

(2) Toutes les fois que $f(a) = f(b)$ dans R, alors $a = b$ dans D.



Test de la droite horizontale

Une fonction f est bijective si et seulement si toute droite horizontale coupe le graphique en un point au plus.

Théorème : Les fonction croissantes ou décroissantes sont bijectives

(1) Une fonction qui est croissante en tout point de son domaine de définition est bijective.

(2) Une fonction qui est décroissante en tout point de son domaine de définition est bijective.

Définition de la fonction réciproque

Soit f une fonction bijective de domaine de définition D et d'ensemble image R. Une fonction g de domaine de définition R et d'ensemble image D est la **fonction réciproque** de f, pour autant que la condition suivante soit vérifiée pour tout x de D et tout y de R :

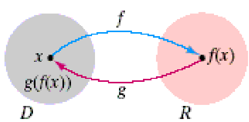
$$y = f(x) \quad \text{si et seulement si} \quad x = g(y)$$

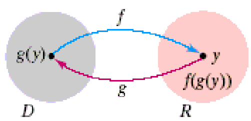
Théorème sur les fonctions réciproques

Soit f une fonction bijective de domaine de définition D et d'ensemble image R. Si g est une fonction de domaine de définition R et d'ensemble image D, alors g est la fonction réciproque de f si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $g(f(x)) = x$ pour tout x de D

(2) $f(g(y)) = y$ pour tout y de R





Domaine de définition et ensemble image de f et f^{-1}

domaine de définition de f^{-1} = ensemble image de f

ensemble image de f^{-1} = domaine de définition de f

Marche à suivre pour déterminer f^{-1}

1. Vérifier que f est une fonction bijective partout dans son domaine de définition.

Etape 1 Le graphique de f est représenté à la figure 75. Le domaine de définition de f est $[0;\infty[$, et l'ensemble image est $[-3;\infty[$. Puisque f est croissante, elle est bijective et a donc une fonction réciproque f^{-1} de domaine de définition $[-3;\infty[$ et d'ensemble image $[0;\infty[$.

2. Résoudre l'équation $y = f(x)$ par rapport à x, pour obtenir une fonction de la forme $x = f^{-1}(y)$.

Etape 2 Considérons l'équation

$$y = x^2 - 3$$

et résolvons par rapport à x, pour obtenir

$$x = \pm\sqrt{y+3}.$$

Puisque x est positif ou nul, nous écartons $x = -\sqrt{y+3}$ et nous avons

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3} \quad \text{ou, ce qui est équivalent} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+3}.$$

(Notons que, si la fonction f avait pour domaine de définition tous les $x \le 0$, nous devrions choisir $f^{-1}(x) = -\sqrt{x+3}$.)

3. Vérifier les conditions figurant dans le théorème sur les fonctions réciproques

Etape 3 Nous vérifions les conditions (a) et (b) pour x appartenant aux domaines de définition respectifs de f et f^{-1}.

(a) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2-3)$

$$= \sqrt{(x^2-3)+3} = \sqrt{x^2} \text{ pour } x \ge 0$$

(b) $f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x+3})$

$$= (\sqrt{x+3})^2 - 3 = (x+3) - 3 = x \text{ pour } x \ge -3$$

Ainsi, la fonction réciproque est

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{pour } x \ge -3.$$

3.9. Variation

Variations directement/inversement proportionnelles

$y = kx$	$c = 2\pi r$
$y = \dfrac{k}{x}$	$I = \dfrac{U}{R}$

Marche à suivre pour résoudre des problèmes de proportionnalités

1. Ecrire une formule *générale* faisant intervenir les variables et une constante de proportionnalité k.
2. Calculer la valeur de k de l'étape 1 en utilisant les données initiales fournies par l'énoncé du problème.
3. Substituer la valeur de k obtenue à l'étape 2 dans la formule de l'étape 1 pour avoir une formule *particulière* faisant intervenir les variables.
4. Utiliser les nouvelles données pour résoudre le problème.

4. Fonctions polynomiales et rationnelles

4.1. Fonctions polynomiales de degré supérieur à 2

Formules f(x)	
Degré 0	$f(x) = a_0$
Degré 1	$f(x) = a_1 x + a_0$
Degré 2	$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions polynomiales

Si f est une fonction polynomiale et $f(a) \neq f(b)$ pour $a < b$, alors f prend toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$ dans l'intervalle $[a\,;b]$.

4.2. Propriétés de la division

Algorithme de la division des polynômes

Si $f(x)$ et $p(x)$ sont des polynômes et si $p(x) \neq 0$, alors il existe deux polynômes uniques $q(x)$ et $r(x)$ tels que

$$f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x),$$

avec soit $r(x) = 0$, soit le degré de $r(x)$ est plus petit que le degré de $p(x)$. Le polynôme $q(x)$ est le quotient et $r(x)$ est le reste de la division de $f(x)$ par $p(x)$.

Théorème du reste

Si un polynôme f(x) est divisé par $x - c$, alors le reste est f(c).

Théorème du diviseur

Un polynôme a un diviseur $x - c$ si et seulement si $f(c) = 0$.

Marche à suivre pour la division par $x - c$

1 Commencer par disposer les coefficients des polynômes donnés selon le tableau ci-dessous.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n & & & & & \end{array}$$

2 Multiplier a_n par c, et placer le produit ca_n sous a_{n-1}, comme indiqué par la flèche dans le tableau suivant. (Cette flèche et les autres ne sont utilisées que pour clarifier cette marche à suivre et n'apparaîtront pas dans des divisions *effectives*.) Ensuite prendre $b_1 = a_{n-1} + ca_n$, et le placer en dessous de la barre.

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\ & & ca_n & cb_1 & cb_2 \dots & cb_{n-2} & cb_{n-1} \\ \hline & a_n & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-2} \quad b_{n-1} & r \end{array}$$

3 Multiplier b_1 par c et placer le produit cb_1 sous a_{n-2}, comme l'indique la deuxième flèche. En poursuivant, nous obtenons la somme $b_2 = a_{n-2} + cb_1$; la placer en dessous de la barre.

4 Continuer ce processus, comme les flèches l'indiquent, jusqu'à ce que la somme finale $r = a_0 + cb_{n-1}$ soit obtenue. Les nombres

$$a_n, \quad b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1}$$

sont les coefficients du quotient $q(x)$; c'est-à-dire

$$q(x) = a_n x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1},$$

et r est le reste.

4.3. Zéros de polynômes

Théorème fondamental de l'algèbre

Si un polynôme $f(x)$ a un degré positif et des coefficients complexes, alors $f(x)$ a au moins un zéro complexe.

Théorème de la factorisation complète des polynômes

Si $f(x)$ est un polynôme de degré $n > 0$, alors il existe n nombres complexes $c_1, c_2, \dots, c_n$ tels que

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n),$$

où a est le coefficient dominant de $f(x)$. Chaque nombre c_k est un zéro de $f(x)$.

Théorème sur le nombre maximal de zéros d'un polynôme

Un polynôme de degré $n > 0$ a au plus n zéros complexes différents.

Théorème sur le nombre exact de zéros d'un plynôme

Si f(x) est un polynôme de degré $n > 0$ et si un zéro de multiplicité m est compté m fois, alors f(x) a exactement n zéros.

Règle des signes de Descartes

Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients réels et à terme constant non nul.

(1) Le nombre de zéros réels *positifs* de $f(x)$ est soit égal au nombre de variations de signes dans $f(x)$, soit plus petit que ce nombre d'un entier pair.

(2) Le nombre de zéros réels *négatifs* de $f(x)$ est soit égal au nombre de variations de signes dans $f(-x)$, soit plus petit que ce nombre d'un entier pair.

Théorème sur les bornes des zéros réels des polynômes

Supposons que $f(x)$ est un polynôme à coefficients réels et à coefficient dominant positif, et que $f(x)$ est divisé par $x - c$.

(1) Si $c > 0$ et si tous les nombres de la troisième ligne du processus de division sont soit positifs soit nuls, alors c est une borne supérieure des zéros réels de $f(x)$.

(2) Si $c < 0$ et si les nombres de la troisième ligne du processus de division sont alternativement positifs et négatifs (dans cette troisième ligne, 0 est considéré comme soit positif soit négatif), alors c est une borne inférieure des zéros réels de $f(x)$.

4.4. Zéros complexes et rationnels de polynômes

Théorème sur les paires de zéros conjugués d'un polynôme

Si $f(x)$ est un polynôme de degré $n > 1$ à coefficients réels et si $z = a + bi$ avec $b \neq 0$ est un zéro de $f(x)$, alors le conjugué complexe $\overline{z} = a - bi$ est aussi un zéro de $f(x)$.

Théorème relatif à la décomposition d'un polynôme en un produit de facteurs du premier et du deuxième degré

Tout polynôme de degré positif n à coefficients réels peut être exprimé en un produit de polynômes du premier et du deuxième degré à coefficients réels tels que les facteurs du deuxième degré sont irréductibles dans $\mathbb{R}$.

Théorème sur les zéros rationnels d'un polynôme

Si le polynôme

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

a des coefficients entiers et si c/d est un zéro rationnel de $f(x)$, c et d n'ayant pas de facteurs premiers communs, alors

(1) le numérateur c du zéro est un facteur du terme constant a_0

(2) le dénominateur d du zéro est un facteur du coefficient dominant a_n

4.5. Fonctions rationnelles

Définition d'une asymptote verticale

La droite $x = a$ est une **asymptote verticale** pour le graphique de la fonction f si

$$f(x) \to \infty \quad \text{ou} \quad f(x) \to -\infty$$

lorsque x tend vers a par la gauche ou par la droite.

Définition d'une asymptote horizontale

La droite $y = c$ est une **asymptote horizontale** pour le graphique de la fonction f si

$$f(x) \to c \quad \text{lorsque} \quad x \to \infty \quad \text{ou lorsque} \quad x \to -\infty.$$

Théorème des asymptotes horizontales

Soit $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, où $a_n \neq 0$ et $b_k \neq 0$.

(1) Si $n < k$, alors l'axe des x (la droite $y = 0$) est l'asymptote horizontale du graphique de f.

(2) Si $n = k$, alors la droite $y = a_n/b_k$ (le rapport des coefficients dominants) est l'asymptote horizontale du graphique de f.

(3) Si $n > k$, le graphique de f n'a pas d'asymptote horizontale. Au lieu de cela, $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$.

Tendances de x

Notation	Terminologie
$x \to a^-$	x tend vers a par la gauche (par valeurs *inférieures* à a).
$x \to a^+$	x tend vers a par la droite (par valeurs *supérieures* à a).
$f(x) \to \infty$	$f(x)$ croît sans être bornée ($f(x)$ prend des valeurs positives arbitrairement grandes).
$f(x) \to -\infty$	$f(x)$ décroît sans être bornée ($f(x)$ prend des valeurs négatives arbitrairement grandes).

Marche à suivre pour représenter le graphique d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, où $g(x)$ et $h(x)$ sont des polynômes sans facteur commun.

1 Déterminer les intersections avec Ox, c'est-à-dire les zéros réels du numérateur $g(x)$, et reporter les points correspondants sur l'axe des x.

2 Déterminer les zéros réels du dénominateur $h(x)$. Pour chaque zéro réel a, représenter l'asymptote verticale $x = a$ en traitillés.

3 Déterminer l'intersection avec Oy, $f(0)$ si elle existe, et reporter le point $(0 ; f(0))$ sur l'axe des y.

4 Appliquer le théorème des asymptotes horizontales. S'il y a une asymptote horizontale $y = c$, la représenter en traitillés.

5 S'il y a une asymptote horizontale $y = c$, déterminer si elle coupe le graphique. Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation $f(x) = c$. Reporter ces points s'ils existent.

6 Représenter le graphique de f dans chaque région du plan Oxy déterminée par les asymptotes verticales vues à l'étape 2. Si nécessaire, exprimer par un signe que le graphique est au-dessus ou au-dessous de l'axe des x ou de l'asymptote horizontale. Utiliser l'étape 5 pour déterminer si le graphique tend vers l'asymptote horizontale par en dessus ou par en dessous.

5. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmiques

5.1. Fonctions exponentielles

Théorème : Le fonctions exponentielles sont bijectives

$f(x) = a^x$	$Si\ x_1 \neq x_2$, alors $a^{x_1} \neq a^{x_2}$ $Si\ a^{x_1} = a^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$

Formule de l'intérêt composé

$$C_n = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Méthode de résolution des équations exponentielles

1. Exprimer les deux membres avec la même base
2. Bijectivité
4. Résoudre

5.2. La fonction exponentielle naturelle

Le nombre e

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828$	Lorsque $n \to \infty$

Définition de la fonction exponentielle

La fonction exponentielle naturelle f est définie par $f(x) = e^x$ pour tout nombre réel x.

5.3. Fonctions logarithmiques

Définition de log$_a$

Soit a un nombre réel positif différent de 1. Le logarithme de base a de x est défini par
$y = \log_a x$ si $x = a^y$ pour tout x>0 et tout nombre réel y.

Propriétés de log$_a$x

$\log_a 1 = 0$	$\log_3 1 = 0$
$\log_a a = 1$	$\log_{10} 10 = 1$
$\log_a a^x = x$	$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$
$a^{\log_a x} = x$	$5^{\log_5 7} = 7$

Théorème: les fonctions logarithmiques sont bijectives

$f(x) = \log_a x$	$Si\ x_1 \neq x_2$, alors $\log_a x_1 \neq \log_a x_2$ $Si\ \log_a x_1 = \log_a x_2$, alors $x_1 = x_2$

Définition du logarithme décimal

$\log x = \log_{10} x$ pout tout $x > 0$	$\log 5 = \log_{10} 5$

Définition du logarithme naturel	
$\ln x = \log_e x$ pout tout $x > 0$	$\ln 5 = \log_e 5$

5.4. Propriétés des logarithmes

Règle de calcul des logarithmes	(Egalement valable pour les logarithmes naturels)
$\log_a(uw) = \log_a u + \log_a w$	$\log_5(2\cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$
$\log_a\left(\frac{u}{w}\right) = \log_a u - \log_a w$	$\log_5\left(\frac{2}{3}\right) = \log_5 2 - \log_5 3$
$\log_a(u^c) = c\log_a u$	$\log_5(2^4) = 4\log_5 2$
Erreurs à ne pas commettre	
$\log_a(u+w) \neq \log_a u + \log_a w$	
$\log_a(u-w) \neq \log_a u - \log_a w$	

5.5. Equations exponentielles et logarithmiques

Théorème: Formule de changement de base	
$\log_b u = \frac{\log_a u}{\log_a b}$	$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2}$
Erreurs à ne pas commettre	
$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a\left(\frac{u}{b}\right)$	
$\frac{\log_a u}{\log_a b} \neq \log_a(u-b)$	

6. Systèmes d'équations et d'inéquations

6.1. Systèmes d'équations

Marche à suivre pour la résolution par substitution de deux équations à deux inconnues

1. Résoudre une des équations par rapport à une des inconnues u en fonction de l'autre inconnue v.
2. Substituer u trouvé à l'étape 1 dans l'autre équation, pour obtenir une équation en v uniquement.
3. Trouver les solutions de l'équation en v obtenue à l'étape 2.
4. Substituer les valeurs de v trouvées à l'étape 3 dans l'équation de l'étape 1 pour trouver les valeurs correspondantes de u.
5. Vérifier dans le système donné chaque couple $(u;v)$ trouvé à l'étape 4.

6.2. Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues

Théorème sur les systèmes équivalents

Soit un système d'équations donné, on obtient un système équivalent si

(1) deux équations sont interverties,

(2) une équation est multipliée ou divisée par une constante non nulle,

(3) un multiple constant d'une équation est additionné à une autre équation.

Caractéristiques d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Graphiques	Nombre de solutions	Classification
Droites sécantes	Une solution	Système possible
Droites confondues	Infinité de solutions	Système indéterminé
Droites parallèles	Aucune solution	Système impossible

6.3. Systèmes d'équations linéaires à plus de deux inconnues

Méthode de résolution par élimination

Résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$

Solution

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -3x + 4y - z = -2 \end{cases}$$ additionner -2 fois la première équation à la deuxième équation

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 5y - 10z = -5 \\ -2y + 8z = 10 \end{cases}$$ additionner 3 fois la première équation à la troisième équation

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ y - 4z = -5 \end{cases}$$ multiplier la deuxième équation par $\frac{1}{5}$ et la troisième équation par $-\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ -2z = -4 \end{cases}$$ additionner -1 fois la deuxième équation à la troisième équation

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ y - 2z = -1 \\ z = 2 \end{cases}$$ multiplier la troisième équation par $-\frac{1}{2}$

Définition d'une matrice

Soient m et n des entiers positifs. Une **matrice** $m \times n$ est un tableau de la forme suivante, où chaque a_{ij} est un nombre réel :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Théorème des transformations des lignes d'une matrice

Soit une matrice d'un système d'équations linéaires, on obtient une matrice d'un système équivalent si

(1) deux lignes sont interverties,

(2) une ligne est multipliée ou divisée par une constante non nulle,

(3) un multiple constant d'une ligne est additionné à une autre ligne.

Symbole	Signification
$R_i \longrightarrow R_j$	Echanger les lignes i et j
$kR_i \longrightarrow R_i$	Multiplier la ligne i par k
$kR_i + R_j \longrightarrow R_j$	Additionner k fois la ligne i à la ligne j

Forme échelonnée d'une matrice

(1) Le premier nombre non nul de chaque ligne, en lisant de gauche à droite, est 1.

(2) La colonne contenant le premier nombre non nul de n'importe quelle ligne est à gauche de la colonne contenant le premier nombre non nul dans la ligne du dessous.

(3) Des lignes formées entièrement de zéros peuvent apparaître au bas de la matrice.

Marche à suivre pour trouver la forme échelonnée d'une matrice

1 Repérer la *première* colonne qui contient des éléments non nuls, et appliquer des transformations élémentaires de lignes de manière à obtenir le nombre 1 dans la première ligne de cette colonne.

2 Appliquer des transformations élémentaires de lignes du type $kR_1 + R_j \longrightarrow R_j$ pour $j > 1$ pour obtenir 0 sous le nombre 1, obtenu à l'étape 1, dans chacune les lignes restantes.

3 *Ne plus tenir compte de la première ligne.* Repérer la prochaine colonne qui contient des éléments non nuls, et appliquer des transformations élémentaires de lignes de manière à obtenir le nombre 1 dans la deuxième ligne de cette colonne.

4 Appliquer des transformations élémentaires de lignes du type $kR_2 + R_j \longrightarrow R_j$ pour $j > 2$ pour obtenir 0 sous le nombre 1, obtenu à l'étape 3, dans chacune les lignes restantes.

5 *Ne plus tenir compte de la première ni de la deuxième ligne.* Repérer la prochaine colonne qui contient des éléments non nuls, et répéter la procédure.

6 Continuer la procédure jusqu'à ce que la forme échelonnée soit atteinte.

6.4. Fractions partielles

Marche à suivre pour trouver la décomposition en fractions partielles

1 Si le degré du numérateur $f(x)$ n'est pas inférieur au degré du dénominateur $g(x)$, utiliser la division euclidienne pour obtenir la forme adéquate.

2 Factoriser le dénominateur $g(x)$ en un produit de facteurs linéaires $px + q$ ou de facteurs quadratiques irréductibles $ax^2 + bx + c$, puis rassembler les facteurs identiques de sorte que $g(x)$ soit le produit de facteurs *différents*, de la forme $(px + q)^m$ ou $(ax^2 + bx + c)^n$, m et n entiers positifs ou nuls.

3 Appliquer les règles suivantes aux facteurs trouvés à l'étape 2.

Règle A : pour chaque facteur de la forme $(px + q)^m$ avec $m \geq 1$, la décomposition en fractions partielles contient une somme de m fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1}{px+q} + \frac{A_2}{(px+q)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(px+q)^m},$$

où chaque numérateur A_k est un nombre réel.

Règle B : pour chaque facteur de la forme $(ax^2 + bx + c)^n$ avec $n \geq 1$ et $ax^2 + bx + c$ irréductible, la décomposition en fractions partielles contient une somme de n fractions partielles de la forme

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2+bx+c)^n},$$

où chaque A_k et chaque B_k est un nombre réel.

4 Trouver les nombres A_k et B_k de l'étape 3.

6.5. Systèmes d'inéquations

Marche à suivre pour représenter graphiquement l'ensemble des solutions d'une inéquation en x et y

1 Remplacer le symbole d'inégalité par un signe égal, et représenter graphiquement l'équation qui en résulte. Utiliser des traits discontinus si le symbole d'inégalité est $<$ ou $>$, pour indiquer qu'aucun point de la courbe n'est une solution. Utiliser un trait plein si le symbole d'inégalité est $\leq$ ou $\geq$, pour indiquer que les solutions de l'équation sont aussi solutions de l'inéquation.

2 Si R est une région du plan xy délimitée par le graphique trouvé à l'étape 1 et si un point test $(p\,;q)$ dans R est solution de l'inéquation, alors tout point de R est solution. Ombrer R pour indiquer cette propriété. Si $(p\,;q)$ n'est pas une solution, alors *aucun* point de R n'est solution et R est laissé sans ombrage.

6.6. Programmation linéaire

Marche à suivre pour résoudre un problème de programmation linéaire

1 Représenter graphiquement la région R déterminée par le système des contraintes.

2 Calculer les sommets de R.

3 Calculer les valeurs de la fonction objectif C à chaque sommet de R.

4 Sélectionner la(les) valeur(s) maximum ou minimum de C trouvée(s) à l'étape 3.

6.7. Le calcul matriciel

Définition de l'égalité et de l'addition de matrices

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, et $C = (c_{ij})$, des matrices $m \times n$.

(1) $A = B$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et j.

(2) $C = A + B$ si et seulement si $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout i et j.

Théorème des propriétés des matrices

Si A, B et C sont des matrices $m \times n$ et si O est la matrice nulle $m \times n$, alors

(1) $A + B = B + A$

(2) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(3) $A + O = A$

(4) $A + (-A) = O$

Définition du produit d'un nombre réel et d'une matrice

Le **produit** d'un nombre réel c et d'une matrice $A = (a_{ij})$, de dimensions $m \times n$, vaut

$$cA = (ca_{ij}).$$

Théorème des propriétés des matrices

Si A et B sont des matrices $m \times n$ et si c et d sont des nombres réels, alors

(1) $c(A + B) = cA + cB$

(2) $(c + d)A = cA + dA$

(3) $(c\,d)A = c(dA)$

Marche à suivre pour calculer le produit de deux matrices

1 Isoler la $i$ème ligne, Li, de A et la $j$ème colonne, C_j, de B:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

2 **Simultanément**, avancer vers la droite le long de L_i, et vers le bas le long de C_j, en multipliant les éléments deux à deux, pour obtenir

$$a_{i1}b_{1j}, a_{i2}b_{2j}, a_{i3}b_{3j}, \ldots, a_{in}b_{nj}.$$

3 Additionner les produits deux à deux calculés à l'étape 2 pour obtenir c_{ij}:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Définition du produit d'une matrice

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice $m \times n$ et soit $B = (b_{ij})$ une matrice $n \times p$. Le **produit** AB est la matrice $C = (c_{ij})$, de dimensions $m \times p$, telle que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, p$.

6.8. L'inverse d'une matrice

Définition de l'inverse d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice B telle que

$$AB = I_n = BA,$$

alors B est appelée l'inverse de A et désignée par A^{-1} (lire « inverse de A»).

Calcul de l'inverse d'une matrice 2x2

Calculer A^{-1} si $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Solution Nous commençons par la matrice

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Ensuite, nous appliquons des transformations élémentaires de lignes jusqu'à ce que la matrice unité I_2 apparaisse à gauche de la ligne verticale :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \mathbf{R}_1 \longleftrightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$-3\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \longrightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{7}\mathbf{R}_2 \longrightarrow \mathbf{R}_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

$$-4\mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1 \longrightarrow \mathbf{R}_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{array}\right]$$

D'après le raisonnement précédent,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vérifions que $AA^{-1} = I_2 = A^{-1}A$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

6.9. Déterminants

Définition du déterminant d'une matrice NxN

Le déterminant $|A|$ d'une matrice A d'ordre n est le développement des cofacteurs suivant les éléments de la première ligne :

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

En termes de mineurs,

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}.$$

Définition des mineurs et des cofacteurs

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n > 1$.

1 Le **mineur** M_{ij} de l'élément a_{ij} est le déterminant de la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

2 Le **cofacteur** A_{ij} de l'élément a_{ij} est $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Théorème du développement des déterminants

Si A est une matrice carrée d'ordre $n > 1$, on peut calculer le déterminant $|A|$ en multipliant les éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne) par leurs cofacteurs respectifs et en additionnant les produits obtenus.

Matrice avec une ligne de zéros

Si tous les éléments d'une ligne (ou colonne) d'une matrice carrée A sont nuls, alors $|A| = 0$.

Théorème de l'inversibilité d'une matrice

Si A est une matrice carrée, alors A est inversible si et seulement si $|A| \neq 0$.

6.10. Propriétés des déterminants

Théorème des transformations de lignes et de colonnes d'un déterminant

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

(1) Si une matrice B s'obtient à partir de A en échangeant deux lignes (ou colonnes), alors $|B| = -|A|$.

(2) Si B s'obtient à partir de A en multipliant chaque élément d'une ligne (ou colonne) de A par un nombre réel k, alors $|B| = k|A|$.

(3) Si B s'obtient à partir de A, en additionnant k fois n'importe quelle ligne (ou colonne) de A avec une autre ligne (ou colonne), k étant un nombre réel, alors $|B| = |A|$, c'est-à-dire que les déterminants de B et de A sont égaux.

Théorème des lignes identiques

Si deux lignes (ou colonnes) d'une matrice carrée A sont identiques, alors $|A| = 0$.

Règle de Cramer (forme générale)

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$